Задачи к лекции 3. (Цепочки)

(!) При вычислениях, связанных с цепочками, рекомендуется опускать индекс n, если это не приводит к недоразумениям. Точно так же, в непрерывном случае обычно опускают аргумент функции. То есть, удобно писать u вместо u_n, $u_{\pm 1}$ вместо $u_{n\pm 1}$ и так далее. Это сильно экономит бумагу. В формулировках задач все индексы прописаны полностью.

13. (Связь цепочек Вольтерра и Тоды) Покажите, что цепочки Вольтерра (1) и Тоды (2) связаны следующей последовательностью замен, необратимой в обе стороны:

$$
\begin{aligned}
&u'_n = u_n(u_{n+1} - u_{n-1}) && (1)\\
&\quad \updownarrow \quad f_n = u_{2n},\ g_n = u_{2n+1} &&\\
&f'_n = \dots, \quad g'_n = \dots &&\\
&\quad \downarrow \quad a_n = f_n g_n,\ b_n = f_{n+1} + g_n &&\\
&a'_n = \dots, \quad b'_n = \dots &&\\
&\quad \uparrow \quad a_n = e^{q_n - q_{n-1}},\ b_n = q'_n &&\\
&q''_n = e^{q_{n+1} - q_n} - e^{q_n - q_{n-1}} && (2)
\end{aligned}
$$

Штрих обозначает производную по непрерывной переменной. Нужно просто аккуратно выписать промежуточные уравнения.

14. Напомним, что для цепочек законом сохранения называется соотношение вида

$$\rho'_n = \sigma_{n+1} - \sigma_n,$$

где ρ_n и σ_n — функции от переменных в нескольких соседних узлах. Проверьте, что цепочка (1) имеет следующие плотности (найдите соответствующие σ)

$$\rho_n^{(0)} = \log u_n, \quad \rho_n^{(1)} = u_n.$$

Докажите, что других плотностей, зависящих от переменной только в одном узле, больше нет. Попробуйте подобрать плотность, зависящую от u_n, u_{n+1}. Если это окажется слишком просто, попробуйте сделать и для u_n, u_{n+1}, u_{n+2} (все плотности, кроме $\rho^{(0)}$, полиномиальны).

15. Цепочкой Богоявленского порядка m называется уравнение

$$u'_n = u_n(u_{n+m} + \dots + u_{n+1} - u_{n-1} - \dots - u_{n-m})$$

(m — фиксированное натуральное число; цепочка Вольтерра отвечает $m = 1$). Эта цепочка тоже интегрируема, но мы её не будем подробно изучать. Проверьте, что $\log u_n$ и u_n служат плотностями и в этом случае, попробуйте обобщить следующую плотность.

16. (Аналог преобразования Миуры для цепочки Вольтерра) Проверьте, что модифицированная цепочка Вольтерра

$$v_n' = (v_n^2 - z^2)(v_{n+1} - v_{n-1}), \tag{3}$$

где z — постоянный параметр, связана с (1) подстановкой

$$u_n = (v_n - z)(v_{n+1} + z). \tag{4}$$

17. Покажите, что преобразование (4) можно обратить в виде формального ряда

$$v_n = z(1 + P_n), \quad P_n = \frac{p_n^{(1)}}{\lambda} + \frac{p_n^{(2)}}{\lambda^2} + \dots, \quad \lambda := z^2, \tag{5}$$

где $p_n^{(k)}$ некоторые многочлены от переменных u_j (верхний индекс это просто номер, отвечающий степени λ). Выведите рекуррентную формулу для этих многочленов и подсчитайте 2–3 штуки.

18. В отличие от преобразования Миуры для КдФ, переменная v_n не является плотностью для модифицированного уравнения, поэтому непосредственно из ряда (5) законы сохранения для (1) не получаются. Однако, плотностью является $\log(z + v_n) = \log 2z + \log(1 + P_n/2)$. Поэтому, чтобы получить плотности в переменных u_n, достаточно применить дополнительное разложение

$$\log(1 + P_n/2) = \frac{P_n}{2} - \frac{P_n^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{P_n^3}{3 \cdot 2^3} - \frac{P_n^4}{4 \cdot 2^4} + \dots$$

Найдите k плотностей таким методом, где k число первых коэффициентов ряда P_n, найденных в предыдущей задаче.