Задачи к лекции 2. (Решения КдФ в виде бегущей волны. Предельный переход от кноидальной волны к солитону. Законы сохранения. Преобразование Миуры. Дифференциальная алгебра. Оператор полной производной, эволюционные дифференцирования. Интегрирование по частям.)

7. (Преобразование Коула–Хопфа) Проверьте прямым вычислением, что если переменная v удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$v_t = v_{xx},$$

то $u = v_x/v$ удовлетворяет уравнению Бюргерса

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x.$$

8. (Преобразование Миуры) Проверьте прямым вычислением, что если переменная v удовлетворяет уравнению мКдФ

$$v_t = v_{xxx} - 6(v^2 + \lambda)v_x,$$

то $u = -v_x - v^2 - \lambda$ удовлетворяет уравнению КдФ

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x.$$

9. Рассмотрим выражение вида

$$f = \sum_{s=0}^{n} a_s u_s u_{n-s}, \quad u_n := \partial_x^n(u),$$

с постоянными коэффициентами a_s. Какому условию должны удовлетворять эти коэффициенты, чтобы f было полной производной, $f \in \operatorname{Im} D_x$?

10. Обращение преобразования Миуры возможно в виде формального ряда (см. файл `02_Inversion of the Miura transformation.nb`)

$$v = -z + V_1/z + V_2/z^2 + \dots,$$

где $\lambda = -z^2$, $V_1 = u/2$ и

$$2V_{n+1} = V_1 V_{n-1} + \dots + V_{n-1}V_1 + V_{n,x}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Вычислите несколько первых коэффициентов. Докажите, что при всех $n = 1, 2, 3, \dots$

$$V_{2n-1} \notin \operatorname{Im} D_x, \quad V_{2n} \in \operatorname{Im} D_x.$$

Указание: для нечётных номеров — проследите за членами вида u^n (кстати, что за числовые коэффициенты стоят при них?); для чётных — используйте вместе с рядом $v = v(z)$ также ряд $\tilde{v} = v(-z)$.

11. Покажите, что если переменные u, v удовлетворяют системе

$$u_t = -u_{xx} + (u^2 + 2uv)_x, \quad v_t = v_{xx} + (v^2 + 2uv)_x,$$

то переменные

$$\tilde{u} = v, \quad \tilde{v} = \frac{v_x}{v} + u$$

также удовлетворяют этой же системе [D. Levi, 1980]. В отличие от преобразования Миуры подстановка $(u, v) \mapsto (\tilde{u}, \tilde{v})$ обратима, найдите обратную к ней. Какое дифференциально-разностное уравнение возникает, если рассмотреть последовательность переменных $(u_n, v_n) \mapsto (u_{n+1}, v_{n+1})$, порожденную итерациями этой подстановки?

12. То же самое для системы Абловица–Каупа–Ньюэлла–Сигура (это одна из нескольких вещественных форм нелинейного уравнения Шрёдингера)

$$u_t = u_{xx} + 2u^2 v, \quad -v_t = v_{xx} + 2uv^2,$$

и подстановки $(u, v) \mapsto (\tilde{u}, \tilde{v})$

$$\tilde{u} = u_{xx} - \frac{u_x^2}{u} + u^2 v, \quad \tilde{v} = \frac{1}{u}.$$

Запишите дифференциально-разностное уравнение, порождённое этой подстановкой, сделав дополнительно замену $u_n = e^{q_n}$.