

Задачи к лекции 1. (Введение. Векторные поля. Однопараметрические группы преобразований)

1. (см. [Zabusky-Kruskal discretization.pdf](#)) Рассмотрим разностное уравнение

$$u_{0,1} - u_{0,-1} = a(u_{2,0} - 2u_{1,0} + 2u_{-1,0} - u_{-2,0}) + 2h^2(bu_{1,0} + (3a - 2b)u_{0,0} + bu_{-1,0})(u_{1,0} - u_{-1,0}), \quad (1)$$

где $u_{i,j}$ обозначает $u_{n+i,m+j}$, $n, m \in \mathbb{Z}$. Проверьте, что при любом b предельный переход

$$u_{n,m} \sim u(x, t), \quad x = nh, \quad t = amh^3, \quad h \rightarrow 0,$$

даёт уравнение КдФ $u_t = u_{xxx} + 6uu_x$, причём аппроксимация в узле имеет порядок $O(h^2)$.

2. Проверьте, что при $b = a$ (и только при этом значении) выполняется следующее свойство: уравнение (1) имеет два закона сохранения с плотностями

$$\rho_{n,m}^{(1)} = u_{n,m+1} + u_{n,m}, \quad \rho_{n,m}^{(2)} = u_{n,m+1}u_{n,m},$$

то есть, разность по m от этих выражений равна разности по n от некоторых других выражений (найдите их):

$$\rho_{n,m+1}^{(i)} - \rho_{n,m}^{(i)} = \sigma_{n+1,m}^{(i)} - \sigma_{n,m}^{(i)}, \quad i = 1, 2.$$

3. Образуют ли локальные однопараметрические группы следующие преобразования T_a , действующие на $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}^2$? Если нет, попробуйте подправить формулу, делая замену параметра так, чтобы получалась группа (там, где это возможно). Вычислите соответствующие инфинитезимальные операторы (генераторы):

- 1) $T_a(u) = \frac{u}{1 + au}$;
- 2) $T_a(u) = u^{1+a}$;
- 3) $T_a(u) = au$;
- 4) $T_a(u, v) = (u - a, v + a)$;
- 5) $T_a(u, v) = (u + av, v)$;
- 6) $T_a(u, v) = (u + av, au + v)$;
- 7) $T_a(u, v) = (v, au + v)$;
- 8) $T_a(u, v) = (\cos(a)u + \sin(a)v, -\sin(a)u + \cos(a)v)$;
- 9) $T_a(u, v) = e^a(u + av, v)$.

4. Проверьте, что следующие векторные поля на прямой образуют алгебру Ли (то есть, их коммутаторы выражаются через них же):

$$X = \partial_u, \quad Y = u\partial_u, \quad Z = u^2\partial_u.$$

Пользуясь теоремой Ли, восстановите групповые преобразования, отвечающие каждому векторному полю. Что за группу они порождают?

5. Вычислите коммутаторы векторных полей:

$$X = v\partial_u - u\partial_v, \quad Y = \partial_u + \partial_v;$$

$$X = v\partial_u - u\partial_v, \quad Y = u\partial_u + v\partial_v.$$

Пользуясь теоремой Ли, восстановите групповые преобразования, отвечающие этим векторным полям. Проверьте, что групповые преобразования перестановочны, если соответствующие векторные поля коммутируют.

6. Проверьте совместность следующего ОДУ и уравнения в частных производных (уравнение Бюргерса):

$$u_{xx} + 3uu_x + u^3 + cu = 0, \quad u_t = u_{xx} + 2uu_x.$$

Для этого, запишите оба уравнения в виде векторных полей на переменных $u_0 = u$ и $u_1 = u_x$ и проверьте их коммутативность. (Это более простой аналог вычисления из `Commuting vector fields.pdf`.)