

Волновая функция для потенциала Баргманна

Чтобы получить n -солитонное решение КдФ, мы строили частное решение уравнения Шрёдингера

$$\psi_{xx} + (u + \lambda)\psi = 0 \quad (1)$$

в виде

$$\varphi(z) = e^{-X}\Phi = e^{-zx-4z^3t}((2z)^n + \varphi_1(2z)^{n-1} + \dots + \varphi_n), \quad z^2 = -\lambda. \quad (2)$$

Это приводит к системе линейных алгебраических уравнений на коэффициенты φ_i

$$\varphi(-k_j) = c_j \varphi(k_j), \quad j = 1, \dots, n$$

и нам было достаточно найти φ_1 , поскольку $u = \partial_x(\varphi_1)$. Однако, ничто не мешает найти также остальные φ_i и посмотреть, как устроены волновые функции $\varphi(z)$ и $\varphi(-z)$ для данного u .

В этом файле иллюстрируется результат этих вычислений — никаких формул, только графики, для случая $n = 4$ с конкретными числовыми значениями

$$k_1 = 0.95, \quad k_2 = 0.75, \quad k_3 = 0.6, \quad k_4 = 0.35,$$

$$c_j = (-1)^{n-j-1} e^{-2\delta_j}, \quad \delta_1 = -0.5, \quad \delta_2 = 1, \quad \delta_3 = 0.3, \quad \delta_4 = -0.2$$

(они ничем не примечательны). Чередование знаков у параметров c_j обеспечивает регулярность потенциала и волновых функций.

Несколько пояснений:

- на графиках выводится $-u$, поскольку в квантовой механике принято в уравнении (1) писать u со знаком минус (то есть, солитон интерпретируется как потенциальная яма);
- одна из функций $\varphi(z)$ и $\varphi(-z)$ экспоненциально убывает при $x \rightarrow +\infty$, другая при $x \rightarrow -\infty$. В точках $\lambda_j = -k_j^2$ эти функции становятся линейно зависимыми (что и написано выше) и определяют собственную (ненормированную) функцию оператора Шрёдингера. Для наглядности, все волновые функции выводятся с одним и тем же общим множителем 0.3 — он подобран для данного конкретного примера так, чтобы амплитуда была примерно того же порядка, что и у потенциала;
- собственные значения принято нумеровать по возрастанию. Для потенциала Баргмана они все отрицательные, $\lambda_j = -k_j^2$, поэтому λ_n — самое маленькое по абсолютной величине:

$$\lambda_1 < \dots < \lambda_n < 0.$$

Числа k_j мы для определенности берём положительными, тогда они упорядочены по убыванию:

$$k_1 > \dots > k_n > 0.$$

Зависимость от z

Здесь показаны волновые функции $\varphi(z)$, $\varphi(-z)$ при фиксированном значении t . Обратите внимание на то, как смещаются нули функций в зависимости от z :

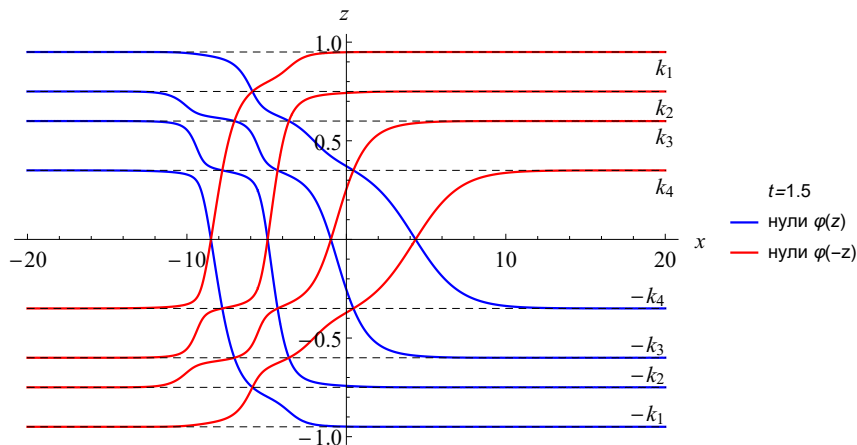
- при $z \geq k_1$ функция $\varphi(z)$ не имеет нулей на оси x ;
- при уменьшении z до 0, нули «заходят» в функцию $\varphi(z)$ через $x = -\infty$, при прохождении z через k_j , и движутся слева направо. В результате, при каждом $z \in [k_{j+1}, k_j)$ эта функция имеет j нулей (n при $z \in [0, k_n)$);
- при дальнейшем уменьшении z нули «выходят» через $x = +\infty$, когда z проходит $-k_j$;
- у функции $\varphi(-z)$ естественно, все наоборот.

Нули $\varphi(z)$ и $\varphi(-z)$

При каждом фиксированном x функция $\varphi(z)$ имеет ровно n нулей по z ,

$$\varphi(z) = \text{const} \cdot e^{-zx-4z^3t}(z-r_1(x)) \dots (z-r_n(x)).$$

При $x \rightarrow -\infty$ эти нули расположены по одному в каждом из интервалов (k_{j+1}, k_j) , $j = 1, \dots, n-1$. При увеличении x функции r_j монотонно убывают и при $x \rightarrow +\infty$ перемещаются в интервалы $(-k_j, -k_{j+1})$, обмениваясь местами с нулями $\varphi(-z)$. Точки x , в которых происходит обмен — это нули собственных функций $\varphi(k_j)$. За исключением этих точек, в каждом из $2n$ интервалов по z находится один нуль, либо функции $\varphi(z)$, либо функции $\varphi(-z)$.



Зависимость от t

Ограничимся собственными функциями $\varphi(k_j, x, t)$. Они изображены на следующем графике в разные моменты t . Их поведение вполне ожидаемо: когда солитоны расходятся достаточно далеко друг от друга, собственная функция, отвечающая $\lambda = -k_j^2$ локализована вблизи соответствующего солитона. При этом она имеет $j - 1$ нулей по x в любой момент t .