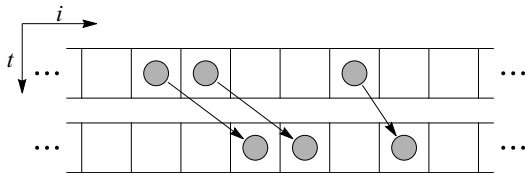


Система «шары и ящики»

Рассмотрим бесконечную ленту, разбитую на клетки-ящики. Пусть в начальный момент времени в конечном числе клеток размещено по одному шару. Чтобы перейти к следующему моменту, перенесём каждый шар по очереди, начиная с крайнего левого и кончая крайним правым, в ближайшую свободную клетку справа от него; при этом каждый шар переносится только один раз. Затем весь процесс повторяется снова и снова, каждый раз с левого края. Чтобы не передвинуть шар дважды, удобно помещать его не в исходную ленту, а в её копию снизу. Тогда разные копии ленты изображают разные моменты времени. Шары считаются неразличимыми, то есть, мы не следим за траекторией отдельного шара, а только за тем, как шары заполняют клетки. Тогда состояние системы описывается последовательностью из 0 и 1, с конечным числом единиц.



Пусть $x_i^t \in \{0, 1\}$ обозначает состояние i -й клетки в момент t , тогда эволюция согласно описанному правилу задаётся формулой

$$x_i^{t+1} = \begin{cases} 1 & \text{если } x_i^t = 0 \text{ и } \sum_{k=-\infty}^{i-1} (x_k^t - x_k^{t+1}) > 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, мы имеем динамическую систему, в которой все переменные дискретны:

и пространственная (позиция на ленте), и временная (номер хода) и полевая (состояние клетки). Такие системы иногда называют *ультрадискретными*. Используется также термин «клеточный автомат», хотя в его стандартном понимании состояние клетки в следующий момент времени должно определяться лишь состоянием соседних клеток из некоторой окрестности (как в знаменитой игре «Жизнь» Конвэя), а здесь это не так. Однако, дело не в названии. Оказывается, что система шаров и ящиков *интегрируема*: шары демонстрируют ярко выраженное солитонное поведение. В каком-то смысле, это самая наглядная солитонная система, которую можно вообразить.

Солитоном в данной модели следует считать группу из нескольких шаров идущих подряд. Легко видеть, что группа из n шаров движется направо со скоростью n клеток за ход. Чем больше группа, тем больше скорость. Пусть справа имеется (достаточно далеко) другая группа из m шаров. Ясно, что если $m \geq n$, то обе группы будут дви-

гаться независимо, но если $m < n$, то в какой-то момент произойдёт столкновение. Что будет дальше? Можно предположить, что группы сольются или распадутся на какие-то другие группы или отдельные пары. Оказывается, что нет. Некоторое время шары обмениваются местами, перемежаясь пустыми клетками, но потом процесс взаимодействия заканчивается и образуется опять две отдельные группы из *того же самого* числа шаров, m и n , но теперь более быстрая группа будет правее. В результате столкновения группы получают некоторый *фазовый сдвиг*, то есть, их траектории немного смещаются относительно тех прямых, по которым они распространялись бы без взаимодействия.

Если взять несколько групп (разделённых достаточно большими промежутками, так что в начальный момент времени их можно считать изолированными), то опять, через некоторое время все они провзаимодействуют и разойдутся, восстановив исходные количества шаров в каждой группе. Это верно, даже если выбрать начальное расположение так, чтобы все траектории пересекались в одном месте — всё равно система восстановится. Более того, окончательный фазовый сдвиг каждой группы будет такой же, как если бы группы взаимодействовали только попарно. Эффекты тройного взаимодействия отсутствуют. Эти свойства легко пронаблюдать на компьютере, но строгое доказательство довольно сложно — модель проста лишь на первый взгляд.

Ровно эти же свойства имеют место при взаимодействии солитонов, например, в уравнении КдФ, где роль числа шаров играет амплитуда солитона (чем она больше, тем больше скорость). *Существование многосолитонных решений, в которых отсутствует тройное взаимодействие, является одним из самых характерных свойств интегрируемых уравнений.*

Кое в чём система шаров и ящиков отличается от уравнения КдФ. В последнем не бывает таких многосолитонных решений, в которых два солитона имели бы одинаковую амплитуду. Для шаров такого запрета нет. Нужно лишь, чтобы число пустых клеток между группами из n шаров было не меньше чем n , этого достаточно, чтобы они могли распространяться параллельно, не мешая друг другу. В остальном взаимодействие с

другими группами происходит как описано выше. Вот, например, взаимодействие групп из 2×3 и 3×2 шаров:

Система шаров и ящиков была предложена в работе [1]. Есть много статей, посвящённых исследованию её свойств и связей с другими интегрируемыми моделями, см. напр. [2] и приведённые там ссылки. Известны также некоторые обобщения, например, на случай, когда клетка имеет больше чем два состояния (разноцветные шары) или на случай, когда движение происходит не по одномерной ленте, а по квадратной решётке.

-
- [1] D. Takahashi, J. Satsuma. A soliton cellular automaton. *J. Phys. Soc. Japan* **59** (1990) [3514–3519](#).
[2] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira. Box and ball system as a realization of ultradiscrete nonautonomous KP equation. *J. Phys. A* **33** (2000) [607–619](#).